Language: **Russian**

Day: **2**

Пятница, 13 апреля 2012

Задача 5. Простые числа p и q удовлетворяют условию
$$\frac{p}{p+1}+\frac{q+1}{q}=\frac{2n}{n+2}$$
для некоторого натурального n. Найдите все возможные значения $q-p$.

Задача 6. Бесконечное количество людей зарегистрированы в социальной сети *Mugbook*. Некоторые пары (различных) пользователей зарегистрированы как *друзья*, но у каждого только конечное количество друзей. У каждого пользователя есть по крайней мере один друг. *(Дружба симметрична, т.е. если A друг B, то B — друг A.)*

Каждый человек должен назвать одного из своих друзей *лучшим другом*. Если A называет B своим лучшим другом, то (к сожалению) это не значит, что B обязательно назовет A своим лучшим другом. Особа, которую назвали лучшим другом, называется 1-*лучшим другом*. Вообще для натурального $n>1$ пользователь называется n-*лучшим другом*, если его назвал лучшим другом человек, который является $(n-1)$-*лучшим другом*. Особа, которая является k-*лучшим другом* для любого натурального k, называется *популярной*.

(a) Докажите, что каждая популярная особа является лучшим другом другой популярной особы.

(b) Докажите, что если у пользователей может быть бесконечное количество друзей, то может случиться так, что популярная особа не является лучшим другом популярной особы.

Задача 7. Пусть ABC — остроугольный треугольник с описанной окружностью Γ и ортоцентром H. Пусть K — точка на окружности Γ по другую сторону от точки A относительно BC. Пусть L — симметрична K относительно AB, а M — симметрична K относительно прямой BC. Пусть E — вторая точка пересечения Γ и описанной окружности треугольника BLM. Докажите, что прямые KH, EM и BC пересекаются в одной точке. *(Ортоцентром треугольника называется точка пересечения его высот.)*

Задача 8. *Слово* — это конечная последовательность букв из некоторого алфавита. Слово называется *повторяющимся*, если это сцепление по крайней мере двух одинаковых подслов (например, *ababab* и *abcabc* — повторяющиеся, а *ababa* и *aabb* — нет). Докажите, что если в слове любая перестановка двух соседних букв делает слово повторяющимся, то все буквы в этом слове одинаковы. (Заметим, что перестановка двух соседних одинаковых букв оставляет слово неизменным.)

Время: 4 часа 30 минут
За каждую задачу максимум 7 баллов