Language: **Latvian**

Day: **2**

Piektdien, 2012. gada 13. aprīlī.

5. uzdevums. Pirmskaitļi p un q ir tādi, ka kādam naturālam skaitlim n:

$$\frac{p}{p+1} + \frac{q+1}{q} = \frac{2n}{n+2}.$$

Atrodiet visas iespējamās $q - p$ vērtības

6. uzdevums. Sociālajā tīklā *Mugbook* ir reģistrējušies bezgalīgi daudz lietotāji. Daži lietotāju pāri (pāris sastāv no diviem dažādiem lietotājiem) ir reģistrējušies kā *Draugi*. Katram lietotājam Draugu skaits ir galīgs, un katram lietotājam ir vismaz viens Draugs. *(Draudzība ir simetriska; tas ir, ja A ir B Draugs, tad arī B ir A Draugs.)*

Katrs dalībnieks nominē kādu no saviem Draugiem par savu *Labāko draugu*. Ja A nominē B kā savu Labāko draugu, tad (diemžēl) no tā neseko, ka B obligāti nominēs A kā savu Labāko draugu. Ja kāds ir nominēts par Labāko draugu, tad viņš tiek saukts par 1.-*labāko draugu*. Un vispārīgi, ja $n > 1$ ir naturāls skaitlis, tad lietotājs ir n − *tais-labākais draugs*, ja viņš ir nominēts, kā Labākais draugs kādam, kurš pats ir $(n-1)$ − *ais-labākais draugs*. Lietotājs, kurš ir k-tais-*labākais draugs* katram naturālam k, tiek saukts par *Populāru*.

(a) Pierādiet, ka katrs Populārs lietotājs ir Labākais draugs kādam Populāram lietotājam.

(b) Pierādiet, ka, ja lietotājiem varētu būt bezgalīgi daudz draugu, tad ir iespējams, ka Populārs lietotājs nav Labākais draugs nevienam Populāram lietotājam.

7. uzdevums. Šaurleņķa trijstūrim ABC apvilkta riņķa līnija Γ un dots tā ortocentrs H. Punkts K ir riņķa līnijas Γ punkts, kurš atrodas otrā pusē no BC nekā A. L ir punktam K simetrisks punkts attiecībā pret taisni AB, un M ir punktam K simetrisks punkts attiecībā pret taisni BC. Punkts E ir otrs riņķa līnijas Γ un trijstūrim BLM apvilktās riņķa līnijas krustpunkts. Pierādīt, ka taisnes KH, EM un BC krustojas vienā punktā. *(Trijstūra ortocentrs ir trijstūra augstumu krustpunkts.)*

8. uzdevums. Par *vārdu* sauksim kāda alfabēta burtu galīgu sekvenci. Teiksim, ka vārds ir *ar atkārtojumiem*, ja tas sastāv no divu vai vairāku identisku *vārdu* apvienojuma (piemēram, *ababab* un *abcabc* ir ar atkārtojumiem, bet *ababa* un *aabb* nav).

Pierādiet, ja *vārdam* jebkuru divu blakus burtu savstarpējas maiņas rezultāts ir vārds ar atkārtojumiem, tad visi tā burti ir identiski. (Piezīme. Divu vienādu burtu maiņa, saglabā *vārdu* nemainīgu.)

Laiks: 4 stundas un 30 minūtes
Katrs uzdevums - 7 punkti.