Language: **Bulgarian**

Day: **2**

*Петък, 13 Април, 2012*

**Задача 5.** Простите числа $p$ и $q$ удовлетворяват равенството

$$\frac{p}{p+1} + \frac{q+1}{q} = \frac{2n}{n+2}$$

за някое цяло положително число $n$. Да се намерят всички възможни стойности на $q-p$.

**Задача 6.** В социална мрежа са регистрирани безбройно много хора. Някои от тях са приятели, като всеки има краен брой приятели и всеки има поне един приятел. *(Приятелството е взаимно: ако $A$ е приятел с $B$, то и $B$ е приятел с $A$.)*

Всеки човек избира един от приятелите си за негов *най-добър приятел*. Ако $A$ избере $B$ за негов най-добър приятел, то $B$ може да не избере $A$ за негов най-добър приятел.

Всеки, избран за най-добър приятел, се нарича 1-*най-добър приятел*. По общо, ако $n > 1$ е естествено число, то човек се нарича $n$-*най-добър приятел* при условие, че той е най-добър приятел с някой, който е $(n-1)$-*най-добър приятел*. Всеки, който е $k$-*най-добър приятел* за всяко естествено число $k$ се нарича *популярен*.

(а) Да се докаже, че всеки популярен човек е най-добър приятел на популярен човек.

(б) Да се докаже, че ако хората могат да имат безбройно много приятели, то е възможно да има популярен човек, който не е най-добър приятел на друг популярен човек.

**Задача 7.** Даден е остроъгълен триъгълник $ABC$ с описана окръжност $\Gamma$ и ортоцентър $H$. Нека $K$ е точка от $\Gamma$, която лежи в полуравнината, определена от $BC$, не съдържаща точка $A$. Точката $L$ е симетрична на $K$ спрямо правата $AB$ и точката $M$ е симетрична на $K$ спрямо правата $BC$. Точката $E$ е втората пресечна точка на $\Gamma$ с описаната окръжност на триъгълник $BLM$. Да се докаже, че правите $KH$, $EM$ и $BC$ се пресичат в една точка.

**Задача 8.** Всяка крайна последователност от букви от някаква азбука наричаме *дума*. Една дума се нарича *циклична* ако тя се получава от свързване на няколко еднакви думи (например, *ababab* и *abcabc* са циклични, докато *ababa* и *aabb* не са). Да се докаже, че ако всяко разместване на две съседни букви в една дума правят думата циклична, то всички букви на тази дума са еднакви.

(Забележка: При размяна на две съседни еднакви букви на една дума, думата не се променя.)



Време за работа: 4 часа и 30 минути
Всяка задача се оценява със 7 точки