

П'ятниця, 13 квітня 2012

Задача 5. Прості числа p та q задовольняють умову

$$\frac{p}{p+1} + \frac{q+1}{q} = \frac{2n}{n+2}$$

для деякого натурального числа n . Знайдіть усі можливі значення $q - p$.

Задача 6. Нескінченно багато людей зареєстровані в соціальній мережі *Mugbook*. Деякі пари (різних) користувачів зареєстровані як *друзі*, але кожна особа має лише скінчену кількість друзів. Кожен користувач має принаймні одного друга. (*Дружба симетрична, тобто якщо A є другом B , то B є другом A .*)

Кожна особа має назвати одного зі своїх друзів *найкращим другом*. Якщо A називає B своїм найкращим другом, то (на жаль) це не означає, що B обов'язково назве A своїм найкращим другом. Людина, котру назвали найкращим другом, називається *1-найкращий друг*. Загалом, для натурального $n > 1$ користувач є *n -найкращим другом*, якщо він був названий найкращим другом особи, яка є $(n - 1)$ -найкращим другом. Особа, котра є *k -найкращим другом* для будь-якого натурального k , називається *популярною*.

- (a) Доведіть, що кожна популярна особа є найкращим другом іншої популярної особи.
- (b) Доведіть, що у випадку, коли кожен може мати нескінченну кількість друзів, може бути, що популярна особа не є найкращим другом популярної особи.

Задача 7. Нехай ABC — гострокутний трикутник з описаним навколо нього колом Γ та ортоцентром H . Нехай K — точка кола Γ по іншу сторону від A відносно BC . Нехай L симетрична точці K відносно прямої AB , а M симетрична точці K відносно прямої BC . Нехай E є другою точкою перетину Γ з описаним колом трикутника VLM . Доведіть, що прямі KH , EM та BC перетинаються в одній точці. (*Ортоцентром трикутника є точка перетину його висот.*)

Задача 8. *Словом* називається скінченна послідовність літер з деякого алфавіту. Слово називається *повторним*, якщо воно є зчепленням принаймні двох однакових підслів (наприклад, $ababab$ та $abcabc$ повторні, а $ababa$ та $aabb$ — ні). Доведіть, що якщо слово має властивість, що перестановка будь-яких двох сусідніх літер робить слово повторним, то всі його літери однакові. (Зауважимо, що перестановка двох сусідніх однакових літер лишає слово незмінним.)