Language: **Polish**

Day: **2**

Piątek, 13 kwietnia 2012

Zadanie 5. Liczby p oraz q są pierwsze i spełniają równanie

$$\frac{p}{p+1} + \frac{q+1}{q} = \frac{2n}{n+2}$$

dla pewnej liczby całkowitej dodatniej n. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości wyrażenia $q - p$.

Zadanie 6. Portal społecznościowy *Mordoksięga* ma nieskończenie wielu użytkowników. Pewne pary (różnych) użytkowników są zarejestrowane jako *przyjaciele*, ale każda osoba ma tylko skończenie wielu przyjaciół. Ponadto, każdy użytkownik ma co najmniej jednego przyjaciela. *(Relacja przyjaźni jest symetryczna: jeśli osoba A jest przyjacielem osoby B, to osoba B jest przyjacielem osoby A.)*

Każdy użytkownik wyznacza jednego ze swoich przyjaciół na *najlepszego przyjaciela*. Jeśli osoba A wyznacza osobę B na swojego najlepszego przyjaciela, to (niestety) osoba B nie musi koniecznie wyznaczyć osoby A na swojego najlepszego przyjaciela. Użytkownika nazywamy 1-*najlepszym przyjacielem*, jeśli ktoś wyznaczył go na swojego najlepszego przyjaciela. Ogólniej, jeśli $n > 1$ jest liczbą całkowitą dodatnią, to użytkownik jest n-*najlepszym przyjacielem* jeśli został wyznaczony na najlepszego przyjaciela przez kogoś, kto jest $(n-1)$-*najlepszym przyjacielem*. Jeśli użytkownik jest k-*najlepszym przyjacielem* dla każdej liczby całkowitej dodatniej k, to takiego użytkownika nazywamy *popularnym*.

(a) Udowodnić, że każdy popularny użytkownik został wyznaczony na najlepszego przyjaciela przez jakiegoś innego popularnego użytkownika.

(b) Wykazać, że jeśli użytkownicy mogą mieć nieskończenie wielu przyjaciół, to jest możliwe by jakiś popularny użytkownik nie został wyznaczony na najlepszego przyjaciela przez żadnego innego popularnego użytkownika.

Zadanie 7. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, na którym opisano okrąg Γ. Punkt H jest ortocentrum trójkąta ABC. Punkt K leży na okręgu Γ po przeciwnej stronie prostej BC niż A. Punkt L jest symetryczny do punktu K względem prostej AB, zaś punkt M jest symetryczny do punktu K względem prostej BC. Punkt E jest drugim punktem przecięcia okręgu Γ z okręgiem opisanym na trójkącie BLM. Wykazać, że proste KH, EM oraz BC przecinają się w jednym punkcie. *(Ortocentrum trójkąta to punkt przecięcia jego wysokości.)*

Zadanie 8. *Słowo* to skończony ciąg liter z pewnego alfabetu. Słowo jest *powtarzające*, jeśli można je uzyskać poprzez napisanie obok siebie pewnego słowa co najmniej dwa razy (przykładowo, *ababab* oraz *abcabc* są powtarzające, ale *ababa* oraz *aabb* nie są). Udowodnić, że jeśli słowo ma taką własność, że każda zamiana dwóch sąsiednich liter sprawia, że staje się ono powtarzające, to wszystkie litery w słowie są takie same. *(Uwaga: można zamieniać również dwie takie same litery występujące obok siebie; wówczas słowo pozostaje niezmienione.)*

Czas trwania zawodów: 4 godziny i 30 minut
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów