Language: **Italian**

Day: **2**

Venerdì, 13 aprile 2012

Problema 5. Siano p e q numeri primi che soddisfano

$$\frac{p}{p+1} + \frac{q+1}{q} = \frac{2n}{n+2}$$

per qualche intero positivo n. Determinare tutti i valori possibili di $q - p$.

Problema 6. Un numero infinito di persone è registrato sul social network *Ceffbook*. Certe coppie di utenti distinti sono registrate come *amici*, con il vincolo che ogni persona può avere solo un numero finito di amici e ne ha sempre almeno uno. *(L'amicizia si suppone simmetrica; quindi, se A è un amico di B, allora B è un amico di A.)*

Ad ogni persona viene chiesto di designare uno dei propri amici come *migliore amico*. Se A designa B come proprio migliore amico, non è detto che B necessariamente scelga A come proprio migliore amico. Diciamo che un utente che sia stato scelto come miglior amico di qualcuno è un 1-*migliore amico*. Più in generale, se $n > 1$ è un intero positivo, un utente è un n-*migliore amico* se è stato scelto come migliore amico da qualcuno che sia a sua volta un $(n-1)$-*migliore amico*. Una persona che sia k-*migliore amico* per ogni intero positivo k è detta *popolare*

(a) Dimostrare che ogni persona popolare è il migliore amico di un'altra persona popolare.

(b) Dimostrare che se gli utenti potessero avere un numero infinito di amici, sarebbe possibile che ci fosse una persona popolare che non è il migliore amico di nessuna persona popolare.

Problema 7. Sia ABC un triangolo acutangolo con circonferenza circoscritta Γ e ortocentro H. Sia K un punto di Γ dall'altra parte di BC rispetto ad A. Sia L il simmetrico di K rispetto alla retta AB, e sia M il simmetrico di K rispetto alla retta BC. Sia E il secondo punto di intersezione di Γ con la circonferenza circoscritta al triangolo BLM. Dimostrare che le rette KH, EM e BC concorrono. *(L'ortocentro di un triangolo è il punto di intersezione delle tre altezze.)*

Problema 8. Una *parola* è una sequenza finita di lettere di un qualche alfabeto. Una parola è detta *ripetitiva* se è formata dalla concatenazione di due o più sottoparole identiche (ad esempio, *ababab* e *abcabc* sono ripetitive, ma *ababa* e *aabb* non lo sono). Dimostrare che se una parola ha la proprietà che scambiando qualunque coppia di lettere adiacenti si ottiene una parola ripetitiva, allora tutte le lettera che la formano sono identiche. (Si noti che è possibile scambiare due lettere adiacenti uguali, lasciando la parola invariata.)

Tempo a disposizione: 4 ore e 30 minuti
Ogni problema vale 7 punti