Language: **German**

Day: **2**

Freitag, 13. April 2012

Aufgabe 5. Die Zahlen p und q sind Primzahlen, und es gilt

$$\frac{p}{p+1} + \frac{q+1}{q} = \frac{2n}{n+2}$$

für eine gewisse positive ganze Zahl n. Man bestimme alle möglichen Werte von $q - p$.

Aufgabe 6. Unendlich viele Menschen haben sich in das soziale Netzwerk *Fratzenbuch* eingeschrieben. Einige Paare (verschiedener) Benutzer sind als *Freunde* registriert, aber jeder Benutzer hat nur endlich viele Freunde. Jeder Benutzer hat mindestens einen Freund. (*Freundschaft ist symmetrisch, d. h. wenn A ein Freund von B ist, dann ist auch B ein Freund von A.*)

Jeder Benutzer muss einen seiner Freunde als seinen *besten Freund* angeben. Wenn A den Benutzer B als seinen besten Freund angibt, folgt es (leider) nicht, dass B notwendigerweise A als seinen besten Freund angibt. Jemand, der als bester Freund angegeben wurde, ist ein 1-*bester Freund*. Allgemeiner ist, für $n > 1$ eine positive ganze Zahl, ein Benutzer ein n-*bester Freund* wenn er als bester Freund eines $(n-1)$-besten Freundes angegeben wurde. Jemand, der ein k-bester Freund für jede positive ganze Zahl k ist, ist *beliebt*.

(a) Man beweise, dass jede beliebte Person der beste Freund einer beliebten Person ist.

(b) Man beweise, dass, wenn Benutzer unendlich viele Freunde haben könnten, es möglich wäre, dass eine beliebte Person der beste Freund keiner beliebten Person ist.

Aufgabe 7. Es sei ABC eine spitzwinkliges Dreieck mit Umkreis Γ und Höhenschnittpunkt H. Es sei K ein Punkt auf Γ, so dass K und A auf verschiedenen Seiten von BC liegen. Es sei L die Spiegelung von K an der Seite AB, und es sei M die Spiegelung von K an der Seite BC. Es sei E der zweite Schnittpunkt von Γ mit dem Umkreis des Dreiecks BLM. Man beweise, dass die Geraden KH, EM und BC sich in einem Punkt schneiden.

Aufgabe 8. Ein *Wort* ist eine endliche Folge von Buchstaben aus einem Alphabet. Ein Wort ist *repetitiv*, wenn es die Aneinanderreihung mindestens zweier identischer Unterwörter ist. (So sind zum Beispiel *ababab* und *abcabc* repetitiv, aber *ababa* und *aabb* sind nicht repetitiv.) Man beweise dass, wenn ein Wort die Eigenschaft hat, dass das Vertauschen egal welcher zweier benachbarter Buchstaben das Wort zu einem repetitiven Wort macht, dann alle Buchstaben des Wortes identisch sind. (Es ist erlaubt, identische benachbarte Buchstaben zu vertauschen, so dass das Wort nicht verändert wird.)