Vendredi 13 Avril 2012

Problème 5. Les nombres premiers p et q satisfont

$$\frac{p}{p+1}+\frac{q+1}{q}=\frac{2n}{n+2}$$

pour un certain nombre entier strictement positif n. Trouver toutes les valeurs possibles de $q-p$.

Problème 6. Il y a un nombre infini de personnes enregistrées sur le réseau social *Facedebouc*. Des paires d'utilisateurs sont enregistrées comme *amis*, mais chaque personne ne peut avoir qu'un nombre fini d'amis. Chaque utilisateur possède au moins un ami. *(L'amitié est symétrique ; c-à-d que si A est un ami de B, alors B est aussi un ami de A.)*

Toute personne doit désigner un de ses amis comme étant son *meilleur ami*. Si A désigne B comme étant son meilleur ami, il ne s'en suit (malheureusement) pas que B choisisse nécessairement A pour meilleur ami. Une personne désignée meilleur ami est appelée 1-*meilleur ami*. Plus généralement, si $n>1$ est un entier positif, alors un utilisateur est appelé n-*meilleur ami* si et seulement si il est désigné meilleur ami par un $(n-1)$-*meilleur ami*. Quelqu'un qui est k-*meilleur ami* pour tout entier strictement positif k est appelé *populaire*.

(a) Prouver que toute personne populaire est le meilleur ami d'une autre personne populaire.

(b) Montrer que si on pouvait avoir un nombre infini d'amis, il serait possible qu'une personne populaire ne soit le meilleur ami d'aucune autre personne populaire.

Problème 7. Soit ABC un triangle aigu dont le cercle circonscrit est nommé Γ et l'orthocentre H. Soit K un point de Γ tel que A et K soient situés de part et d'autre de BC. Soit L le symétrique de K par rapport à AB et M le symétrique de K par rapport à BC. Soit E le second point d'intersection de Γ avec le cercle circonscrit au triangle BLM. Montrer que les droites KH, EM et BC sont concourantes. *(L'orthocentre d'un triangle est l'intersection de ses hauteurs.)*

Problème 8. Un *mot* est une suite finie de lettres d'un certain alphabet. Un mot est *répétitif* s'il est la juxtaposition d'au moins deux séquences identiques (par exemple *ababab* et *abcabc* sont répétitifs, mais *ababa* et *aabb* ne le sont pas). Prouver que si un mot a la propriété qu'en interchangeant toute paire de lettres adjacentes, on obtient un mot répétitif, alors toutes ses lettres sont identiques. (On peut interchanger deux lettres adjacentes identiques laissant ainsi le mot inchangé).

Durée: 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points