

Vrijdag 13 april 2012

**Opgave 5.** De getallen  $p$  en  $q$  zijn priem en voldoen aan

$$\frac{p}{p+1} + \frac{q+1}{q} = \frac{2n}{n+2}$$

voor een zeker positief geheel getal  $n$ . Vind alle mogelijke waarden van  $q - p$ .

**Opgave 6.** Op de sociaal-netwerk-website *Smoelenboek* zijn oneindig veel mensen geregistreerd. Sommige paren van (verschillende) mensen zijn geregistreerd als *vrienden*, maar elke persoon heeft slechts eindig veel vrienden. Elke gebruiker heeft ten minste één vriend. (*Vriendschap is wederzijds: dus als A een vriend van B is, dan is B ook een vriend van A.*)

Elke gebruiker moet één van zijn vrienden tot zijn *beste vriend* benoemen. Als persoon  $A$  persoon  $B$  tot zijn beste vriend benoemt, dan hoeft (helaas)  $B$  niet per se ook  $A$  te benoemen tot zijn beste vriend. Een gebruiker die door een ander tot beste vriend benoemd is, noemen we een *1-beste vriend*. Algemener geldt: als  $n > 1$  een positief geheel getal is, dan is een gebruiker een *n-beste vriend* als hij benoemd is tot de beste vriend van iemand die zelf een  $(n - 1)$ -beste vriend is. Een gebruiker die een *k-beste vriend* is voor elk positief geheel getal  $k$ , heet *populair*.

- Bewijs dat elke populaire gebruiker de beste vriend is van een andere populaire gebruiker.
- Bewijs dat als mensen ook oneindig veel vrienden kunnen hebben, het dan mogelijk is dat een populaire gebruiker van geen enkele andere populaire gebruiker de beste vriend is.

**Opgave 7.** Zij  $ABC$  een scherphoekige driehoek met omgeschreven cirkel  $\Gamma$  en hoogtepunt  $H$ . Zij  $K$  een punt op  $\Gamma$  aan de andere kant van  $BC$  dan  $A$ . Zij  $L$  het spiegelbeeld van  $K$  in de lijn  $AB$  en zij  $M$  het spiegelbeeld van  $K$  in de lijn  $BC$ . Zij  $E$  het tweede snijpunt van  $\Gamma$  met de omgeschreven cirkel van driehoek  $BLM$ . Bewijs dat de lijnen  $KH$ ,  $EM$  en  $BC$  door één punt gaan. (*Het hoogtepunt van een driehoek is het punt dat op alle drie de hoogtelijnen ligt.*)

**Opgave 8.** Een *woord* is een eindig rijtje letters uit een of ander alfabet. Een woord heet *repetierend* als het bestaat uit twee of meer dezelfde woorden die achter elkaar geplakt zijn (zo zijn *ababab* en *abcabc* repetierend, maar *ababa* en *aabb* niet). Bewijs dat als een woord de eigenschap heeft dat elke verwisseling van twee aangrenzende letters zorgt dat het woord repetierend wordt, dan alle letters van het woord hetzelfde moeten zijn. (Merk op dat je twee aangrenzende letters die hetzelfde zijn, ook mag verwisselen, waarbij het woord dus onveranderd blijft.)