

Language: **Ukrainian**

Day: **1**

EGMO | 2012
European Girls' Mathematical Olympiad

Четвер, 12 квітня 2012

Задача 1. Нехай ABC — трикутник з центром описаного кола в точці O . Точки D , E та F лежать всередині сторін BC , CA та AB відповідно, так, що пряма DE перпендикулярна до CO та DF перпендикулярна до BO . (Тобто, точка D лежить на прямій BC між точками B та C і т.д.)

Нехай K — центр описаного кола трикутника AFE . Доведіть, що прямі DK та BC перпендикулярні.

Задача 2. Нехай n — натуральне число. В залежності від n знайдіть найбільше можливе ціле m , що має таку властивість: таблицю з m рядками та n стовпчиками можна заповнити дійсними числами таким чином, що для будь-яких двох різних рядків $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ та $[b_1, b_2, \dots, b_n]$ виконується:

$$\max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \dots, |a_n - b_n|) = 1.$$

Задача 3. Знайдіть усі функції $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такі, що

$$f(yf(x+y) + f(x)) = 4x + 2yf(x+y)$$

для будь-яких $x, y \in \mathbb{R}$.

Задача 4. Множина цілих чисел A називається *сумо-повною*, якщо $A \subseteq A + A$, тобто, будь-який елемент $a \in A$ представляється у вигляді суми деякої пари (не обов'язково різних) елементів $b, c \in A$ (можливо, $b = c$). Множина цілих чисел A називається *без-суми-нуль*, якщо 0 — єдине ціле число, що не представляється у вигляді суми елементів скінченної непорожньої підмножини множини A .

Чи існує сумо-повна без-суми-нуль множина цілих чисел?