

Language: Turkish

Day: 1

**EGMO | 2012**  
European Girls' Mathematical Olympiad

12 Nisan 2012 Perşembe

**Soru 1.**  $ABC$  üçgeninin çevrel çemberinin merkezi  $O$  dur. Sırasıyla,  $[BC]$ ,  $[CA]$  ve  $[AB]$  kenarlarının iç noktaları olan  $D$ ,  $E$  ve  $F$  için,  $DE$  doğrusu  $CO$  doğrusuna ve  $DF$  doğrusu da  $BO$  doğrusuna diktir. (*İç nokta* ile, örneğin,  $D$  nin  $BC$  doğrusu üstünde ve  $B$  ile  $C$  arasında yer aldığını kastediyoruz.)

$K$ ,  $AFE$  üçgeninin çevrel çemberinin merkezi olsun.  $DK$  ve  $BC$  doğrularının birbirine dik olduğunu kanıtlayınız.

**Soru 2.**  $n$  pozitif bir tam sayı olsun. Aşağıdaki koşulu sağlayan en büyük  $m$  tam sayısını bulunuz:

$m$  satırı ve  $n$  sütunu olan bir tablo, herhangi iki farklı satırındaki  $[a_1, a_2, \dots, a_n]$  ve  $[b_1, b_2, \dots, b_n]$  sayıları

$$\max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \dots, |a_n - b_n|) = 1.$$

koşulunu sağlayacak biçimde gerçel sayılarla doldurulabilir.

**Soru 3.** Her  $x, y \in \mathbb{R}$  için,

$$f(yf(x+y) + f(x)) = 4x + 2yf(x+y)$$

koşulunu sağlayan tüm  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonlarını bulunuz.

**Soru 4.** Tam sayılardan oluşan bir  $A$  kümesi  $A \subseteq A + A$  koşulunu sağlıyorsa; yani, her  $a \in A$  elemanı farklı olması gerekmeyen  $b, c \in A$  elemanlarının toplamı olarak yazılabiliyorsa,  $A$  ya *toplamlı* diyoruz. Tam sayılardan oluşan bir  $A$  kümesinin boş olmayan sonlu bir altkümesinin elemanlarının toplamı biçiminde yazılamayan tek tam sayı 0 ise,  $A$  ya *sıfır-toplamsız* diyoruz.

Tam sayılardan oluşan ve hem toplamlı, hem de sıfır-toplamsız olan bir küme var mıdır?