Language: **Polish**

Day: **1**

Czwartek, 12 kwietnia 2012

Zadanie 1. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Punkty D, E, F leżą odpowiednio we wnętrzach boków BC, CA oraz AB, przy czym prosta DE jest prostopadła do prostej CO oraz prosta DF jest prostopadła do prostej BO.

Punkt K jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie AFE. Wykazać, że proste DK oraz BC są prostopadłe. *(Uwaga: Punkt Z leży we wnętrzu odcinka XY, jeśli leży on na prostej XY pomiędzy punktami X oraz Y.)*

Zadanie 2. Dana jest liczba całkowita dodatnia n. Wyznaczyć, w zależności od n, największą możliwą liczbę całkowitą m o następującej własności: tabelę posiadającą m wierszy i n kolumn można wypełnić liczbami rzeczywistymi w taki sposób, by dla każdych dwóch różnych wierszy $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ oraz $[b_1, b_2, \ldots, b_n]$ spełnione było:

$$\max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \ldots, |a_n - b_n|) = 1.$$

Zadanie 3. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające równanie

$$f\big(\, yf(x+y) + f(x) \,\big) = 4x + 2yf(x+y)$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4. Zbiór liczb całkowitych A nazywamy *pełnym ze względu na sumy* jeśli $A \subseteq A + A$, to znaczy każdy element $a \in A$ jest sumą pewnej pary (niekoniecznie różnych) elementów $b, c \in A$. Zbiór liczb całkowitych A nazywamy *zero-wolnym ze względu na sumy* jeśli 0 jest jedyną liczbą całkowitą, której nie da się przedstawić jako sumy elementów niepustego, skończonego podzbioru zbioru A.

Czy istnieje zbiór liczb całkowitych, który jest zarówno pełny za względu na sumy, jak i zero-wolny ze względu na sumy?

Czas trwania zawodów: 4 godziny i 30 minut
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów