Language: **Latvian**

Day: **1**

Ceturtdien, 2012. gada 12. aprīlī

1. uzdevums. Punkts O ir trijstūra ABC apvilktās riņķa līnijas centrs. Punkti D, E un F atrodas attiecīgi uz BC, CA and AB to iekšpusē tā, ka DE ir perpendikulārs CO, un DF ir perpendikulārs BO. (Iekšpusē nozīmē, ka, piemēram, punkts D atrodas uz taisnes BC starp punktiem B un C, u.t.t.)

Punkts K ir trijstūrim AFE apvilktās riņķa līnijas centrs. Pierādīt, ka taisnes DK un BC ir perpendikulāras.

2. uzdevums. Naturālam skaitlim n atrast lielāko iespējamo veselo skaitli m, kuram izpildās īpašība:

tabulā ar m rindām un n kolonnām ir iespējams tā ierakstīt reālus skaitļus, lai jebkurām divām dažādām tabulas rindām $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ un $[b_1, b_2, \ldots, b_n]$ būtu patiesa izteiksme:

$$\max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \ldots, |a_n - b_n|) = 1.$$

(Lai izteiktu m, var tikt izmantota izteiksme, kura atkarīga no n.)

3. uzdevums. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (R-reālo skaitļu kopa) tādas, ka

$$f\big(\, yf(x+y) + f(x) \,\big) = 4x + 2yf(x+y)$$

visiem $x, y \in \mathbb{R}$.

4. uzdevums. Veselu skaitļu kopu A sauksim par *summas-pilnu*, ja $A \subseteq A + A$, t.i. katrs kopas A elements $a \in A$ ir izsakāms kā divu šīs kopas elementu summa $b, c \in A$ (b un c var būt arī vienādi).

Teiksim, ka veselu skaitļu kopa A ir *nulles-summas-brīva*, ja 0 ir vienīgais veselais skaitlis, kuru nevar izteikt, kā kopas A galīgas netukšas apakškopas visu elementu summu.

Vai eksistē summas-pilna un nulles-summas-brīva veselu skaitļu kopa?

Laiks: 4 stundas un 30 minūtes
Katrs uzdevums - 7 punkti.