

Language: German

Day: 1



**EGMO | 2012**  
European Girls' Mathematical Olympiad

Donnerstag, 12. April 2012

**Aufgabe 1.** Es sei  $ABC$  ein Dreieck mit Umkreismittelpunkt  $O$ . Die Punkte  $D$ ,  $E$  und  $F$  liegen jeweils im Innern der Seiten  $BC$ ,  $CA$  und  $AB$ , so dass  $DE$  senkrecht zu  $CO$  ist, und  $DF$  senkrecht zu  $BO$  ist. (Unter *Innern* verstehen wir, dass zum Beispiel der Punkt  $D$  auf der Geraden  $BC$  liegt, und dass  $D$  sich zwischen den Punkten  $B$  und  $C$  auf dieser Geraden befindet.)

Es sei  $K$  der Umkreismittelpunkt des Dreiecks  $AFE$ . Man beweise, dass die Geraden  $DK$  und  $BC$  senkrecht zueinander sind.

**Aufgabe 2.** Es sei  $n > 0$  eine positive ganze Zahl. Man bestimme die größte positive ganze Zahl  $m$  mit der folgenden Eigenschaft: eine Tabelle mit  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten kann auf solche Art und Weise mit reellen Zahlen gefüllt werden, dass für jedes Paar zweier verschiedener Zeilen  $[a_1, a_2, \dots, a_n]$  und  $[b_1, b_2, \dots, b_n]$  gilt, dass

$$\max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \dots, |a_n - b_n|) = 1.$$

**Aufgabe 3.** Man bestimme alle Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass

$$f(yf(x+y) + f(x)) = 4x + 2yf(x+y)$$

für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt.

**Aufgabe 4.** Eine Menge  $A$  ganzer Zahlen heiße *summen-voll* wenn  $A \subseteq A + A$ , d. h. wenn ein jedes Element  $a \in A$  die Summe zweier, nicht notwendigerweise verschiedener, Elemente  $b, c \in A$  ist. Eine Menge  $A$  ganzer Zahlen heiße *null-summen-frei* wenn 0 die einzige ganze Zahl ist, die nicht als Summe der Elemente einer endlichen, nicht leeren Untermenge von  $A$  geschrieben werden kann.

Existiert eine summen-volle, null-summen-freie Menge ganzer Zahlen?