

Language: Dutch

Day: 1



EGMO | 2012  
European Girls' Mathematical Olympiad

Donderdag 12 april 2012

**Opgave 1.** Zij  $ABC$  een driehoek met  $O$  het middelpunt van de omschreven cirkel. De punten  $D$ ,  $E$  en  $F$  liggen in het inwendige van respectievelijk zijden  $BC$ ,  $CA$  en  $AB$ , zo dat  $DE$  loodrecht op  $CO$  staat en  $DF$  loodrecht op  $BO$  staat. (Met *in het inwendige* bedoelen we dat bijvoorbeeld punt  $D$  op de lijn  $BC$  ligt, met  $D$  tussen  $B$  en  $C$ .)

Zij  $K$  het middelpunt van de omschreven cirkel van driehoek  $AFE$ . Bewijs dat de lijnen  $DK$  en  $BC$  loodrecht op elkaar staan.

**Opgave 2.** Zij  $n$  een positief geheel getal. Bepaal de grootste gehele  $m$  met de volgende eigenschap: een tabel met  $m$  rijen and  $n$  kolommen kan gevuld worden met reële getallen op zo'n manier dat voor elk tweetal verschillende rijen uit de tabel, waarbij de ene rij van links naar rechts gevuld is met de getallen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  en de andere rij van links naar rechts met de getallen  $b_1, b_2, \dots, b_n$ , geldt:

$$\max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \dots, |a_n - b_n|) = 1.$$

**Opgave 3.** Vind alle functies  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  waarvoor geldt dat

$$f(yf(x+y) + f(x)) = 4x + 2yf(x+y)$$

voor alle  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**Opgave 4.** Een verzameling  $A$  van gehele getallen noemen we *somvol* als  $A \subseteq A + A$ , d.w.z. dat elk element  $a \in A$  de som is van twee (niet noodzakelijk verschillende) elementen  $b, c \in A$ . Een verzameling  $A$  van gehele getallen noemen we *nulsomvrij* als 0 het enige gehele getal is dat niet te schrijven is als de som van de elementen van een eindige, niet-lege deelverzameling van  $A$ .

Bestaat er een somvolle, nulsomvrije verzameling van gehele getallen?