

Language: Arabic

Day: 1

EGMO | 2012
European Girls' Mathematical Olympiad

الخميس 12 أبريل 2012

السؤال الأول. ليكن ABC مثلثاً و O مركز الدائرة المارة برؤوسه. النقاط D, E, F تقع في داخل الأضلاع BC, CA, AB على الترتيب، بحيث أن DE عمودي على CO و DF عمودي على BO . (على سبيل المثال النقطة D تقع على المستقيم BC و D تقع بين B و C على هذا المستقيم وهكذا).
ليكن K مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث AFE . أثبت أن المستقيمين DK و BC متعامدان.

السؤال الثاني. ليكن n عدداً صحيحاً موجباً. أوجد أكبر قيمة ممكنة للعدد الصحيح m (بدلالة n) التي تحقق الشرط التالي:
في جدول يتكون من m صف و n عمود يمكننا ملء جميع خانات الجدول بأعداد حقيقية بحيث أن الخاصية التالية متحققة لأي صفين مختلفين $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ و $[b_1, b_2, \dots, b_n]$ في الجدول:

$$\max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \dots, |a_n - b_n|) = 1.$$

السؤال الثالث. أوجد جميع الدوال $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ التي تحقق

$$f(y f(x + y) + f(x)) = 4x + 2y f(x + y)$$

لكل $x, y \in \mathbb{R}$.

السؤال الرابع. نقول عن مجموعة من الأعداد الصحيحة A أنها مجموعة كاملة إذا كان $A \subseteq A + A$ ، أي أن كل عنصر $a \in A$ هو مجموع لعنصرين (ليس بالضرورة مختلفين) $b, c \in A$. كذلك نقول عن مجموعة من الأعداد الصحيحة A أنها مجموعة خالية من المجموع الصفري إذا كان 0 هو العدد الصحيح الوحيد الذي لا يمكن كتابته كمجموع عناصر مجموعة غير خالية، منتهية، وجزئية من A . هل توجد مجموعة خالية من المجموع الصفري وكاملة في نفس الوقت؟

Language: Arabic

الزمن: 4 ساعات و 30 دقيقة
الدرجات: 7 درجات لكل سؤال