

12 Nisan 2012 Perşembe

Soru 1. ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi O dur. Sırasıyla, $[BC]$, $[CA]$ ve $[AB]$ kenarlarının iç noktaları olan D , E ve F için, DE doğrusu CO doğrusuna ve DF doğrusu da BO doğrusuna diktir. (İç nokta ile, örneğin, D nin BC doğrusu üstünde ve B ile C arasında yer aldığını kastediyoruz.)

K , AFE üçgeninin çevrel çemberinin merkezi olsun. DK ve BC doğrularının birbirine dik olduğunu kanıtlayınız.

Soru 2. n pozitif bir tam sayı olsun. Aşağıdaki koşulu sağlayan en büyük m tam sayısını bulunuz:

m satırı ve n sütunu olan bir tablo, herhangi iki farklı satırındaki $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ ve $[b_1, b_2, \dots, b_n]$ sayıları

$$\max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \dots, |a_n - b_n|) = 1.$$

koşulunu sağlayacak biçimde gerçel sayılarla doldurulabilir.

Soru 3. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için,

$$f(yf(x+y) + f(x)) = 4x + 2yf(x+y)$$

koşulunu sağlayan tüm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

Soru 4. Tam sayılardan oluşan bir A kümesi $A \subseteq A + A$ koşulunu sağlıyorsa; yani, her $a \in A$ elemanı farklı olması gerekmeyen $b, c \in A$ elemanlarının toplamı olarak yazılabiliyorsa, A ya *toplamlı* diyoruz. Tam sayılardan oluşan bir A kümesinin boş olmayan sonlu bir altkümesinin elemanlarının toplamı biçiminde yazılamayan tek tam sayı 0 ise, A ya *sıfır-toplamsız* diyoruz.

Tam sayılardan oluşan ve hem toplamlı, hem de sıfır-toplamsız olan bir küme var mıdır?