Language: **Serbian**

Day: **1**

Четвртак, 12. април 2012.

Задатак 1. Нека је O центар описаног круга троугла ABC. Тачке D, E и F су унутрашње тачке страница BC, CA и AB, респективно, такве да је права DE ортогонална на праву CO и права DF ортогонална на праву BO.

Ако је K центар описаног круга троула AFE, доказати да су праве DK и BC ортогоналне.

Задатак 2. Дат је природан број n. Одредити највећи природан број m (у зависности од n) са следећим својством: таблица са m врста и n колона се може попунити реалним бројевима на тај начин да за сваке две разне врсте $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ и $[b_1, b_2, \dots, b_n]$ те таблице важи да је

$$\max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \dots, |a_n - b_n|) = 1.$$

Задатак 3. Одредити све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да важи

$$f\big(yf(x+y) + f(x)\big) = 4x + 2yf(x+y)$$

за све $x, y \in \mathbb{R}$.

Задатак 4. За скуп A целих бројева казаћемо да је *пун збирова* ако важи $A \subseteq A + A$, тј. сваки елемент $a \in A$ је збир нека два (не обавезно различита) елемента $b, c \in A$. За скуп A целих бројева казаћемо да је *без збира нула* ако је 0 једини цео број који се не може изразити као збир елемената неког коначног непразног подскупа од A.

Да ли постоји скуп целих бројева који је истовремено пун збирова и без збира нула?

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена