Четверг, 12 апреля 2012

Задача 1. Пусть ABC — треугольник с центром описанной окружности в точке O. Точки D, E и F лежат внутри сторон BC, CA и AB соответственно, так, что DE перпендикулярна к CO и DF перпендикулярна к BO. (Таким образом, точка D лежит на прямой BC между точками B и C и т.д.)

Пусть K — центр описанной окружности треугольника AFE. Докажите, что прямые DK и BC перпендикулярны.

Задача 2. Пусть n — натуральное число. В зависимости от n найдите наибольшее возможное целое m со следующим свойством: таблицу с m рядами и n столбцами можно заполнить действительными числами так, что для любых двух различных рядов $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ и $[b_1, b_2, \ldots, b_n]$ выполняется следующее:

$$\max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \ldots, |a_n - b_n|) = 1.$$

Задача 3. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что

$$f\big(\, yf(x+y) + f(x) \,\big) = 4x + 2yf(x+y)$$

для любых $x, y \in \mathbb{R}$.

Задача 4. Множество целых чисел A называется *суммо-полным*, если $A \subseteq A + A$, т.е. любой элемент $a \in A$ является суммой некоторой пары (не обязательно различных) элементов $b, c \in A$. Множество целых чисел A называется *без-суммы-ноль*, если 0 — единственное целое число, которое не представимо в виде суммы элементов конечного непустого подмножества множества A.

Существует ли суммо-полное без-суммы-ноль множество целых чисел?

Время: 4 часа 30 минут
За каждую задачу максимум 7 баллов