

Language: Polish

Day: 1

Czwartek, 12 kwietnia 2012

Zadanie 1. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC . Punkty D, E, F leżą odpowiednio we wnętrzach boków BC, CA oraz AB , przy czym prosta DE jest prostopadła do prostej CO oraz prosta DF jest prostopadła do prostej BO .

Punkt K jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie AFE . Wykazać, że proste DK oraz BC są prostopadłe. (Uwaga: Punkt Z leży we wnętrzu odcinka XY , jeśli leży on na prostej XY pomiędzy punktami X oraz Y .)

Zadanie 2. Dana jest liczba całkowita dodatnia n . Wyznaczyć, w zależności od n , największą możliwą liczbę całkowitą m o następującej własności: tabelę posiadającą m wierszy i n kolumn można wypełnić liczbami rzeczywistymi w taki sposób, by dla każdych dwóch różnych wierszy $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ oraz $[b_1, b_2, \dots, b_n]$ spełnione było:

$$\max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \dots, |a_n - b_n|) = 1.$$

Zadanie 3. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające równanie

$$f(yf(x+y) + f(x)) = 4x + 2yf(x+y)$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4. Zbiór liczb całkowitych A nazywamy *pełnym ze względu na sumy* jeśli $A \subseteq A + A$, to znaczy każdy element $a \in A$ jest sumą pewnej pary (niekoniecznie różnych) elementów $b, c \in A$. Zbiór liczb całkowitych A nazywamy *zero-wolnym ze względu na sumy* jeśli 0 jest jedyną liczbą całkowitą, której nie da się przedstawić jako sumy elementów niepustego, skończonego podzbioru zbioru A .

Czy istnieje zbiór liczb całkowitych, który jest zarówno pełny za względu na sumy, jak i zero-wolny ze względu na sumy?