Language: **German**

Day: **1**

Donnerstag, 12. April 2012

Aufgabe 1. Es sei ABC ein Dreieck mit Umkreismittelpunkt O. Die Punkte D, E und F liegen jeweils im Innern der Seiten BC, CA und AB, so dass DE senkrecht zu CO ist, und DF senkrecht zu BO ist. (Unter *Innerm* verstehen wir, dass zum Beispiel der Punkt D auf der Geraden BC liegt, und dass D sich zwischen den Punkten B und C auf dieser Geraden befindet.)

Es sei K der Umkreismittelpunkt des Dreiecks AFE. Man beweise, dass die Geraden DK und BC senkrecht zueinander sind.

Aufgabe 2. Es sei $n > 0$ eine positive ganze Zahl. Man bestimme die größte positive ganze Zahl m mit der folgenden Eigenschaft: eine Tabelle mit m Zeilen und n Spalten kann auf solche Art und Weise mit reellen Zahlen gefüllt werden, dass für jedes Paar zweier verschiedener Zeilen $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ und $[b_1, b_2, \ldots, b_n]$ gilt, dass

$$\max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \ldots, |a_n - b_n|) = 1.$$

Aufgabe 3. Man bestimme alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass

$$f\big(\, yf(x+y) + f(x)\,\big) = 4x + 2yf(x+y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 4. Eine Menge A ganzer Zahlen heiße *summen-voll* wenn $A \subseteq A + A$, d. h. wenn ein jedes Element $a \in A$ die Summe zweier, nicht notwendigerweise verschiedener, Elemente $b, c \in A$ ist. Eine Menge A ganzer Zahlen heiße *null-summen-frei* wenn 0 die einzige ganze Zahl ist, die nicht als Summe der Elemente einer endlichen, nicht leeren Untermenge von A geschrieben werden kann.

Existiert eine summen-volle, null-summen-freie Menge ganzer Zahlen?

Arbeitszeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden