Jeudi 12 Avril 2012

Problème 1. Soit ABC un triangle dont le centre du cercle circonscrit est O. Les points D, E et F sont respectivement situés à l'intérieur des segments BC, CA et AB tels que DE soit perpendiculaire à CO et DF soit perpendiculaire à BO (Par *intérieur*, nous voulons dire, par exemple, que le point D se trouve sur la droite BC et que D est situé entre B et C).

Soit K le centre du cercle circonscrit du triangle AFE. Prouver que les droites DK et BC sont perpendiculaires.

Problème 2. Soit n un entier strictement positif. Trouver le plus grand entier positif m satisfaisant la propriété suivante : un tableau à m lignes et n colonnes peut être rempli par des nombres réels afin que pour toute paire de lignes $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ et $[b_1, b_2, \ldots, b_n]$ on ait que

$$\max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \ldots, |a_n - b_n|) = 1.$$

Problème 3. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f\big(\, yf(x+y) + f(x) \,\big) = 4x + 2yf(x+y)$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

Problème 4. Un ensemble A d'entiers est dit *somme-clos* si $A \subseteq A+A$, c-à-d tout élément $a \in A$ est la somme de deux éléments $b, c \in A$ (qui ne sont pas nécessairement distincts). Un ensemble A d'entiers est dit *somme-nulle-absente* si 0 est le seul entier qui ne peut s'exprimer comme la somme des éléments d'un sous-ensemble fini non-vide de A.

Existe-t-il un ensemble d'entiers qui soit somme-clos et somme-nulle-absente ?