

Jeudi 12 Avril 2012

**Problème 1.** Soit  $ABC$  un triangle dont le centre du cercle circonscrit est  $O$ . Les points  $D$ ,  $E$  et  $F$  sont respectivement situés à l'intérieur des segments  $[BC]$ ,  $[CA]$  et  $[AB]$  tels que  $DE$  soit perpendiculaire à  $CO$  et  $DF$  soit perpendiculaire à  $BO$  (Par *intérieur*, nous voulons dire, par exemple, que le point  $D$  se trouve sur la droite  $BC$  et que  $D$  est situé entre  $B$  et  $C$ ).

Soit  $K$  le centre du cercle circonscrit du triangle  $AFE$ . Prouver que les droites  $DK$  et  $BC$  sont perpendiculaires.

**Problème 2.** Soit  $n$  un entier strictement positif. Trouver le plus grand entier positif  $m$  satisfaisant la propriété suivante : un tableau à  $m$  lignes et  $n$  colonnes peut être rempli par des nombres réels afin que pour toute paire de lignes  $[a_1, a_2, \dots, a_n]$  et  $[b_1, b_2, \dots, b_n]$  on ait que

$$\max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \dots, |a_n - b_n|) = 1.$$

**Problème 3.** Trouver toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$f(yf(x+y) + f(x)) = 4x + 2yf(x+y)$$

pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**Problème 4.** Un ensemble  $A$  d'entiers est dit *somme-clos* si  $A \subseteq A+A$ , c-à-d tout élément  $a \in A$  est la somme de deux éléments  $b, c \in A$  (qui ne sont pas nécessairement distincts). Un ensemble  $A$  d'entiers est dit *somme-nulle-absente* si 0 est le seul entier qui ne peut s'exprimer comme la somme des éléments d'un sous-ensemble fini non-vide de  $A$ .

Existe-t-il un ensemble d'entiers qui soit somme-clos et somme-nulle-absente ?