

Language: Dutch

Day: 1

Donderdag 12 april 2012

Opgave 1. Zij ABC een driehoek met O het middelpunt van de omgeschreven cirkel. De punten D , E en F liggen in het inwendige van respectievelijk zijden BC , CA en AB , zo dat DE loodrecht op CO staat en DF loodrecht op BO staat. (Met *in het inwendige* bedoelen we dat bijvoorbeeld punt D op de lijn BC ligt, met D tussen B en C .)

Zij K het middelpunt van de omgeschreven cirkel van driehoek AFE . Bewijs dat de lijnen DK en BC loodrecht op elkaar staan.

Opgave 2. Zij n een positief geheel getal. Bepaal de grootste gehele m met de volgende eigenschap: een tabel met m rijen and n kolommen kan gevuld worden met reële getallen op zo'n manier dat voor elk tweetal verschillende rijen uit de tabel, waarbij de ene rij van links naar rechts gevuld is met de getallen a_1, a_2, \dots, a_n en de andere rij van links naar rechts met de getallen b_1, b_2, \dots, b_n , geldt:

$$\max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \dots, |a_n - b_n|) = 1.$$

Opgave 3. Vind alle functies $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ waarvoor geldt dat

$$f(yf(x+y) + f(x)) = 4x + 2yf(x+y)$$

voor alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Opgave 4. Een verzameling A van gehele getallen noemen we *somvol* als $A \subseteq A + A$, d.w.z. dat elk element $a \in A$ de som is van twee (niet noodzakelijk verschillende) elementen $b, c \in A$. Een verzameling A van gehele getallen noemen we *nulsomvrij* als 0 het enige gehele getal is dat niet te schrijven is als de som van de elementen van een eindige, niet-lege deelverzameling van A .

Bestaat er een somvolle, nulsomvrije verzameling van gehele getallen?