Четвъртък, 12 Април, 2012

Задача 1. Даден е триъгълник ABC с център на описаната окръжност точка O. Точките D, E и F са вътрешни съответно за страните BC, CA и AB и са такива, че правата DE е перпендикулярна на CO и правата DF е перпендикулярна на BO.

Точката K е център на описаната окръжност за триъгълник AFE. Да се докаже, че правите DK и BC са перпендикулярни.

Задача 2. Дадено е цяло положителни число n. Да се намери най-голямото цяло число m, за което в клетките на таблица с m реда и n стълба могат да се запишат реални числа така, че за всеки два различни реда от таблицата $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ е изпълнено:

$$\max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \ldots, |a_n - b_n|) = 1.$$

Задача 3. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ за които

$$f\big(\ yf(x+y) + f(x)\ \big) = 4x + 2yf(x+y)$$

за произволни $x, y \in \mathbb{R}$.

Задача 4. Множество от цели числа A се нарича *sum-full* ако $A \subseteq A + A$, т.е. всеки елемент $a \in A$ е сбор на два елемента $b, c \in A$ (не непременно различни). Множество A от цели числа се нарича *zero-sum-free* ако 0 е единственото цяло число, което не може да се представи като сбор на елементите на крайно непразно подмножество на A.

Съществува ли множество от цели числа, което е едновременно sum-full и zero-sum-free?

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Всяка задача се оценява със 7 точки