

Language: Hungarian

Day: 2

**EGMO | 2012**  
European Girls' Mathematical Olympiad

2012. április 13., péntek

**Feladat 5.** A  $p$  és  $q$  prímek az alábbi egyenlőséget teljesítik valamely  $n$  pozitív egészre:

$$\frac{p}{p+1} + \frac{q+1}{q} = \frac{2n}{n+2}.$$

Adjuk meg  $q - p$  összes lehetséges értékét.

**Feladat 6.** A *Fércebook* közösségi hálózaton végtelen sok ember van regisztrálva. Két (különböző) felhasználó köthet *barátságot*, de mindenkinek csak véges sok barátja van. Minden felhasználónak van legalább egy barátja. (*A barátság szimmetrikus, azaz ha B-nek barátja A, akkor A-nak is barátja B.*)

Minden felhasználónak ki kell jelölnie, hogy a barátai közül ki a *legjobb barátja*. Abból, hogy  $A$   $B$ -t jelöli meg legjobb barátjaként, (sajnos) nem feltétlenül következik, hogy  $B$  éppen  $A$ -t jelöli meg legjobb barátjaként. Ha valakit legjobb barátjának választottak, akkor ő *1-legjobb barát*. Általánosabban, egy  $n > 1$  pozitív egészre egy felhasználó *n-legjobb barát*, ha a legjobb barátja valakinek, aki  $(n - 1)$ -legjobb barát. Ha valaki minden  $k$  pozitív egészre *k-legjobb barát*, akkor *népszerű*.

- Bizonyítsuk be, hogy minden népszerű ember valamelyik másik népszerű embernek a legjobb barátja.
- Mutassuk meg, hogy ha az embereknek végtelen sok barátjuk is lehet, akkor előfordulhat, hogy egy népszerű ember nem a legjobb barátja egyetlen népszerű embernek sem.

**Feladat 7.** Legyen  $ABC$  hegyesszögű háromszög, melynek körülírt köre  $\Gamma$ , magasságpontja pedig  $H$ . Legyen  $K$  egy pont a  $\Gamma$  körön,  $A$ -ból nézve  $BC$  túloldalán. Legyen  $L$  a  $K$ -nak  $AB$  egyenesre vonatkozó tükörképe,  $M$  pedig  $K$ -nak  $BC$  egyenesre vonatkozó tükörképe. Jelöljük  $E$ -vel  $\Gamma$ -nak és a  $BLM$  háromszög körülírt körének eddig meg nem jelölt metszéspontját. Mutassuk meg, hogy a  $KH$ ,  $EM$  és  $BC$  egyenesek egy ponton mennek át. (*A háromszög magasságpontja az a pont, amely mindhárom magasságán rajta van.*)

**Feladat 8.** Egy szó valamilyen ábécéből származó betűk véges sorozata. Egy szó *ismétlő*, ha megkapható kettő vagy több azonos részének egymás után írásával (például *ababab* és *abcabc* ismétlő, de *ababa* és *aabb* nem). Bizonyítsuk be, hogy ha egy szóban bármely két szomszédos betűt megcserélve ismétlő szót kapunk, akkor a szó csupa azonos betűből áll. (Vegyük észre, hogy két azonos szomszédos betűt megcserélve a szó nem változik.)