Language: **Finnish**

Day: 2

Perjantai, 13. huhtikuuta, 2012

Tehtävä 5. Luvut p ja q ovat alkulukuja ja toteuttavat ehdon

$$\frac{p}{p+1} + \frac{q+1}{q} = \frac{2n}{n+2}$$

jollakin positiivisella kokonaisluvulla n. Etsi kaikki mahdolliset erotuksen $p - q$ arvot.

Tehtävä 6. Äärettömän monta ihmistä on rekisteröityneenä yhteisöverkkoon, jonka nimi on *Pärstäkerroin*. Jotkut kahden eri käyttäjän muodostamat parit ovat rekisteröityneet *ystäviksi*, mutta jokaisella käyttäjällä on vain äärellinen määrä ystäviä. Jokaisella käyttäjällä on ainakin yksi ystävä. *(Ystävyys on symmetristä, eli jos A on käyttäjän B ystävä, niin B on käyttäjän A ystävä.)*

Jokaisen on valittava yksi ystävistään *parhaaksi ystäväkseen*. Jos A valitsee käyttäjän B parhaaksi ystäväkseen, ei siitä (valitettavasti) seuraa, että B valitsisi käyttäjän A parhaaksi ystäväkseen. Sellaista joka on valittu parhaaksi ystäväksi, kutsutaan 1-*parhaaksi ystäväksi*. Yleisemmin, jos $n > 1$ on positiivinen kokonaisluku, niin käyttäjä on n-*paras ystävä*, jos hänet on valittu sellaisen käyttäjän parhaaksi ystäväksi, joka on $(n-1)$-*paras ystävä*. Sellaista, joka on k-*paras ystävä* kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla k, kutsutaan *suosituksi*.

(a) Todista, että jokainen suosittu käyttäjä on jonkun suositun käyttäjän paras ystävä.

(b) Osoita, että jos käyttäjillä voi olla äärettömän paljon ystäviä, niin on mahdollista, että suosittu käyttäjä ei ole yhdenkään suositun käyttäjän paras ystävä.

Tehtävä 7. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio, jonka ympäripiirretty ympyrä on Γ ja ortokeskus H. Olkoon K sellainen ympyrän Γ piste, joka on eri puolella janaa BC kuin A. Olkoon L pisteen K peilaus suoran AB suhteen, ja olkoon M pisteen K peilaus suoran BC suhteen. Olkoon E toinen kolmion BLM ympäripiirretyn ympyrän ja ympyrän Γ leikkauspiste. Osoita, että suorat KH, EM ja BC leikkaavat samassa pisteessä. *(Kolmion ortokeskus on korkeusjanojen leikkauspiste.)*

Tehtävä 8. *Sana* on jonkin aakkoston kirjainten äärellinen jono. Sana on *toistava*, jos se on vähintään kahden identtisen alisanan konkatenaatio (esimerkiksi *ababab* ja *abcabc* ovat toistavia, mutta *ababa* ja *aabb* eivät ole). Osoita, että jos sanalla on sellainen ominaisuus, että minkä tahansa kahden vierekkäisen kirjaimen paikan vaihtaminen keskenään tekee siitä toistavan, niin sen kaikki kirjaimet ovat samoja. (Huomaa, että on mahdollista vaihtaa kahden vierekkäin sijaitsevan identtisen kirjaimen paikkaa säilyttäen sana samana.)

Aika: 4 tuntia ja 30 minuuttia
Jokainen tehtävä on 7 pisteen arvoinen