

Петък, 13 Април, 2012

**Задача 5.** Простите числа  $p$  и  $q$  удовлетворяват равенството

$$\frac{p}{p+1} + \frac{q+1}{q} = \frac{2n}{n+2}$$

за някое цяло положително число  $n$ . Да се намерят всички възможни стойности на  $q - p$ .

**Задача 6.** В социална мрежа са регистрирани безбройно много хора. Някои от тях са приятели, като всеки има краен брой приятели и всеки има поне един приятел. (*Приятелството е взаимно: ако  $A$  е приятел с  $B$ , то и  $B$  е приятел с  $A$ .*)

Всеки човек избира един от приятелите си за негов *най-добър приятел*. Ако  $A$  избере  $B$  за негов най-добър приятел, то  $B$  може да не избере  $A$  за негов най-добър приятел.

Всеки, избран за най-добър приятел, се нарича *1-най-добър приятел*. По общо, ако  $n > 1$  е естествено число, то човек се нарича  *$n$ -най-добър приятел* при условие, че той е най-добър приятел с някой, който е  $(n - 1)$ -най-добър приятел. Всеки, който е  *$k$ -най-добър приятел* за всяко естествено число  $k$  се нарича *популярен*.

- (а) Да се докаже, че всеки популярен човек е най-добър приятел на популярен човек.
- (б) Да се докаже, че ако хората могат да имат безбройно много приятели, то е възможно да има популярен човек, който не е най-добър приятел на друг популярен човек.

**Задача 7.** Даден е остроъгълен триъгълник  $ABC$  с описана окръжност  $\Gamma$  и ортоцентър  $H$ . Нека  $K$  е точка от  $\Gamma$ , която лежи в полуравнината, определена от  $BC$ , не съдържаща точка  $A$ . Точката  $L$  е симетрична на  $K$  спрямо правата  $AB$  и точката  $M$  е симетрична на  $K$  спрямо правата  $BC$ . Точката  $E$  е втората пресечна точка на  $\Gamma$  с описаната окръжност на триъгълник  $BLM$ . Да се докаже, че правите  $KH$ ,  $EM$  и  $BC$  се пресичат в една точка.

**Задача 8.** Всяка крайна последователност от букви от някаква азбука наричаме *дума*. Една дума се нарича *циклична* ако тя се получава от свързване на няколко еднакви думи (например,  $ababab$  и  $abcabc$  са циклични, докато  $ababa$  и  $aabb$  не са). Да се докаже, че ако всяко разместване на две съседни букви в една дума правят думата циклична, то всички букви на тази дума са еднакви.

(Забележка: При размяна на две съседни еднакви букви на една дума, думата не се променя.)