

Language: Russian

Day: 1



EGMO | 2012  
European Girls' Mathematical Olympiad

Четверг, 12 апреля 2012

**Задача 1.** Пусть  $ABC$  — треугольник с центром описанной окружности в точке  $O$ . Точки  $D$ ,  $E$  и  $F$  лежат внутри сторон  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  соответственно, так, что  $DE$  перпендикулярна к  $CO$  и  $DF$  перпендикулярна к  $BO$ . (Таким образом, точка  $D$  лежит на прямой  $BC$  между точками  $B$  и  $C$  и т.д.)

Пусть  $K$  — центр описанной окружности треугольника  $AFE$ . Докажите, что прямые  $DK$  и  $BC$  перпендикулярны.

**Задача 2.** Пусть  $n$  — натуральное число. В зависимости от  $n$  найдите наибольшее возможное целое  $m$  со следующим свойством: таблицу с  $m$  рядами и  $n$  столбцами можно заполнить действительными числами так, что для любых двух различных рядов  $[a_1, a_2, \dots, a_n]$  и  $[b_1, b_2, \dots, b_n]$  выполняется следующее:

$$\max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \dots, |a_n - b_n|) = 1.$$

**Задача 3.** Найдите все функции  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  такие, что

$$f(yf(x+y) + f(x)) = 4x + 2yf(x+y)$$

для любых  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**Задача 4.** Множество целых чисел  $A$  называется *суммо-полным*, если  $A \subseteq A + A$ , т.е. любой элемент  $a \in A$  является суммой некоторой пары (не обязательно различных) элементов  $b, c \in A$ . Множество целых чисел  $A$  называется *без-суммы-ноль*, если  $0$  — единственное целое число, которое не представимо в виде суммы элементов конечного непустого подмножества множества  $A$ .

Существует ли суммо-полное без-суммы-ноль множество целых чисел?