

Language: Romanian

Day: 1

EGMO | 2012
European Girls' Mathematical Olympiad

Joi, 12 aprilie 2012

Problema 1. Fie ABC un triunghi având punctul O ca centru al cercului său circumscris. Punctele D , E și F se află respectiv pe laturile BC , CA și AB , astfel încât dreapta DE este perpendiculară pe CO iar dreapta DF este perpendiculară pe BO . (De exemplu, punctul D se află pe dreapta BC , fiind situat între B și C pe acea dreaptă.)

Fie K centrul cercului circumscris triunghiului AFE . Demonstrați că dreptele DK și BC sunt perpendiculare.

Problema 2. Fie n un număr întreg strict pozitiv. Determinați cel mai mare număr întreg m cu proprietatea că un tablou cu m linii și n coloane poate fi umplut cu numere reale în așa fel încât pentru oricare două linii diferite $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ și $[b_1, b_2, \dots, b_n]$ următoarea relație este adevărată

$$\max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \dots, |a_n - b_n|) = 1.$$

Problema 3. Determinați toate funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care

$$f(yf(x+y) + f(x)) = 4x + 2yf(x+y)$$

pentru toți $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 4. O mulțime A de numere întregi se zice *sumă-plină* dacă $A \subseteq A + A$, adică orice element $a \in A$ este suma unei perechi (nu neapărat unice) de elemente (nu neapărat distincte) $b, c \in A$. O mulțime A de numere întregi se zice *liberă-de-sume-zero* dacă 0 este singurul număr întreg care nu poate fi exprimat ca suma elementelor unei submulțimi finite nevide a lui A .

Există oare o mulțime sumă-plină liberă-de-sume-zero de numere întregi?