Language: **Hungarian**

Day: **1**

2012. április 12., csütörtök

Feladat 1. Legyen az ABC háromszög körülírt körének középpontja O. A D, E, F pontok rendre a BC, CA és AB oldalakon találhatók, úgy, hogy DE merőleges CO-ra és DF merőleges BO-ra. (Így például a D pont a BC egyenesen helyezkedik el B és C között.)

Legyen az AFE háromszög körülírt körének középpontja K. Bizonyítsuk be, hogy a DK és BC egyenesek merőlegesek egymásra.

Feladat 2. Legyen n pozitív egész szám. Keressük meg a legnagyobb olyan m egész számot n függvényében, melyre érvényes az alábbi tulajdonság: egy m sorból és n oszlopból álló táblázatot ki lehet tölteni valós számokkal úgy, hogy bármely két különböző $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ és $[b_1, b_2, \ldots, b_n]$ sorra

$$\max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \ldots, |a_n - b_n|) = 1.$$

Feladat 3. Keressük meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, melyre

$$f\big(\, yf(x+y) + f(x) \,\big) = 4x + 2yf(x+y)$$

minden $x, y \in \mathbb{R}$ számpárra.

Feladat 4. Az egész számokból álló A halmazt *összegzésre teljesnek* nevezzük, ha $A \subseteq A + A$, azaz minden $a \in A$ valamely $b, c \in A$ (nem feltétlenül különböző) elemek összege. Az egész számokból álló A halmazt *összegzésre nulla-mentesnek* mondjuk, ha a 0 az egyetlen olyan egész szám, mely nem írható fel A egy véges részhalmazának összegeként.

Döntsük el, hogy létezik-e egészekből álló, összegzésre teljes, összegzésre nulla-mentes halmaz.

Idő: 4 óra 30 perc
Minden feladat 7 pontot ér.